Concours B

DURÉE : 4 heures

On note $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls et $\mathbb{R}_+^*$ l'ensemble des nombres réels strictement positifs.

On introduit l'ensemble E des fonctions f positives, continues, décroissantes sur $\mathbb{R}_+^*$, vérifiant $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$ et telles que l'intégrale de $tf(t)$ sur $[0,1]$ soit convergente.

Tout au long du problème, et sans qu'il soit nécessaire de le rappeler, f désigne un élément de E .

Partie I.

1. Trouver les réels α tels que la fonction $t \mapsto t^{-\alpha}$ soit dans E .

2. Montrer que pour tout $x > 0$, l'application $t \mapsto f(t+x)$ est un élément de E .

3. Soit $(a_k)_{k\geq 1}$ une suite croissante de réels strictement positifs convergeant vers $+\infty$. Montrer que la série de terme général $(-1)^k f(a_k)$ converge.

4. On cherche à montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\sin t\,dt$ converge.

   (a) Montrer que l'intégrale $\int_0^{\pi} f(t)\sin t\,dt$ converge.

   (b) Montrer que :

   $$\forall k \geq 1, \quad \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)\sin t\,dt = (-1)^k \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)\,|\sin t|\,dt\ .$$

   (c) Montrer que :

   $$\forall k \geq 1, \ \exists a_k \in [k\pi,(k+1)\pi] \ ; \ \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)\,|\sin t|\,dt = 2f(a_k)\ .$$

   (on commencera par encadrer l'intégrale $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)\,|\sin t|\,dt$).

   (d) Etablir que la suite

   $$U_n = \int_0^{n\pi} f(t)\sin t\,dt, \quad n \geq 1$$

   converge.

   (e) Conclure que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\sin t\,dt$ converge.

5. Montrer que :

   $$\int_0^{+\infty} f(t)\sin t\,dt \geq 0\ .$$

   (on étudiera le signe de $\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} f(t)\sin t\,dt$).

6. Montrer que pour tout $x > 0$, les intégrales

$$\int_x^{+\infty} f(t)\,\sin(t-x)\,dt \quad \text{et} \quad \int_x^{+\infty} f(t)\,\cos t\,dt$$

convergent.

Dans la suite du problème, on pose, pour $x > 0$:

$$Y_f(x) = \int_x^{+\infty} f(t)\,\sin(t-x)\,dt\,. \tag{1}$$

7. Au cours de cette question, on cherche à caractériser les fonctions $f \in E$ telles que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,\sin t\,dt$ soit absolument convergente.

   (a) Montrer que :

$$\forall k \geq 1, \quad \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)\,|\sin t|\,dt \geq \frac{2}{\pi}\int_{(k+1)\pi}^{(k+2)\pi} f(t)\,dt\,.$$

   (on pourra utiliser la question 4. (c)).

   (b) En déduire qu'il y a équivalence entre

   (i) l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,\sin t\,dt$ est absolument convergente
   (ii) l'intégrale $\int_\pi^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente.

8. Trouver les réels $\alpha > 0$ tels que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{-\alpha}\,\sin t\,dt$ soit absolument convergente.

Partie II.

On s'intéresse dans cette partie à l'équation différentielle :

$$Y'' + Y = f \tag{2}$$

1. Décrire les solutions de l'équation homogène associée.

2. Montrer que les solutions de (2) sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions :

$$Y(x) = A(x)\cos x + B(x)\sin x$$

   où

$$A'(x) = -\sin x\,f(x) \quad \text{et} \quad B'(x) = \cos x\,f(x)\,.$$

3. En déduire que la fonction Y_f, définie lors de la première partie, est solution de (2).

4. Montrer que Y_f est positive sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifie :

$$\lim_{x\to+\infty} Y_f(x) = 0\,.$$

5. Montrer que Y_f est l'unique solution de (2) sur $\mathbb{R}_+^*$ qui converge vers 0 à l'infini.

6. On cherche à montrer que Y_f est prolongeable par continuité en 0 .

   (a) Montrer que si $0 < x < x_0$,

   $$\left|\sin x \int_x^{x_0} f(t)\cos t\,dt\right| \leq \int_0^{x_0} t\,f(t)\,dt\ .$$

   (b) Soit $\epsilon > 0$. Montrer que :

   $$\exists \eta > 0\ ;\ \forall x \in]0,\eta[,\quad \left|\sin x \int_x^{+\infty} f(t)\cos t\,dt\right| < \epsilon\ .$$

   (on coupera l'intégrale en deux morceaux).

   (c) Utiliser la conclusion du (b) pour montrer que la fonction Y_f est prolongeable par continuité en 0 en posant :

   $$Y_f(0) = \int_0^{+\infty} f(t)\sin t\,dt\ . \qquad (3)$$

7. Dans cette question, f est un élément de E, est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée f' est croissante.

   (a) Si $0 < x < y$, on définit h par :

   $$h(t) = f(x+t) - f(y+t)\ .$$

   Vérifier que $h \in E$. En déduire que Y_f est décroissante.

   (b) Trouver les réels α tels que la fonction $t \mapsto t^{-\alpha}$ vérifie les hypothèses de cette question.

Partie III.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, l'intégrale

   $$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt$$

   est convergente.

Dans toute la suite de cette partie, on note :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt \quad \text{si } x \in \mathbb{R}_+\ . \qquad (4)$$

2. (a) Calculer $F(0)$. Montrer que F est décroissante.

   (b) Montrer que :

   $$\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0\ .$$

   (on pourra majorer $F(x)$).

Si n est un entier strictement positif, on note :

$$F_n(x) = \int_0^{n} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt\ . \qquad (5)$$

3. On fixe un réel x . Montrer que la série de fonctions de terme général

$$\varphi_k(t) = \frac{(-tx)^k}{(1+t^2)\,k!}, \quad k \geq 0$$

converge normalement sur l'intervalle $[0, n]$. En déduire que :

$$\forall n \geq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad F_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k!} \int_0^n \frac{t^k}{1+t^2}\, dt \ .$$

4. Déduire de la question précédente que pour tout entier n, la fonction F_n est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Etablir de plus que :

$$\forall p \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad F_n^{(p)}(x) = \int_0^n \frac{(-t)^p e^{-tx}}{1+t^2}\, dt \ .$$

5. Montrer que :

$$\forall x \geq 0, \quad |F(x) - F_n(x)| \leq \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} n \ .$$

En déduire que la fonction F est continue sur $\mathbb{R}_+$.

6. (a) Montrer que pour tout $x_0 > 0$, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{t\, e^{-tx_0}}{1+t^2}\, dt$$

est convergente.

(b) Montrer que pour tout $x_0 > 0$, la suite de fonctions F_n' converge uniformément sur l'intervalle $[x_0, +\infty[$.

(c) En déduire que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et donner une expression de F'.

7. En reprenant la démarche de la question précédente, montrer brièvement que F est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifie :

$$\forall x > 0, \quad F''(x) + F(x) = \frac{1}{x} \ .$$

8. Montrer que pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x) - F(0)}{x} \right| &\geq \int_0^{1/x} \frac{1 - e^{-tx}}{x(1+t^2)}\, dt \\ &\geq e^{-1} \int_0^{1/x} \frac{t}{1+t^2}\, dt \ . \end{aligned}$$

En déduire que F n'est pas dérivable en 0 .

9. En utilisant les résultats de la deuxième partie, montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2} \ .$$

Partie IV.

Dans toute cette partie, β désigne un réel strictement supérieur à 1.

1. Montrer que l'intégrale $I_\beta = \int_0^{+\infty} \sin(u^\beta)\, du$ est convergente et vérifie :

$$I_\beta = \int_0^{+\infty} \sin(u^\beta)\, du = \frac{1}{\beta} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{1-1/\beta}}\, dt \ .$$

2. Etablir l'identité :

$$\frac{\beta^2}{\beta - 1} I_\beta = \frac{\pi}{2} + \int_0^{+\infty} (1 - \cos t)\,(t^{-2+1/\beta} - t^{-2})\, dt \ .$$

3. (a) En utilisant la formule de Taylor-Lagrange, montrer que :

$$\forall t > 0, \quad 0 \leq 1 - \cos t \leq \min\left(\frac{t^2}{2}, 2\right) \ .$$

(b) Montrer que :

$$\lim_{\beta \to +\infty} \int_0^{+\infty} (1 - \cos t)\,(t^{-2+1/\beta} - t^{-2})\, dt = 0 \ .$$

(c) En déduire que I_β est équivalent à $\dfrac{\pi}{2\beta}$ lorsque $\beta \to +\infty$.

4. Montrer que :

$$\forall \beta > 1, \quad |\beta\, I_\beta| \leq \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t^{1-1/\beta}}\, dt \ .$$

En déduire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\forall \beta > 1, \quad |I_\beta| \leq C \ .$$